الاشتقاق ودراسة الدوال

1) اشتقاق دالة في عدد : تعاريف و تأويلات هندسية

f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليمين	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f_d'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_d'(a)$ و معادلته : $y=f_d'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليسار	$\leftrightarrow$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f_g'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_g'(a)$ و معادلته : $y=f_g'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f_d'(a)=f_g'(a)=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

- **إذاكانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f_d'(a)\neq f_g'(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة**
- **إذا كانت $f'(a)=0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$**

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

2) اشتقاق دالة على مجال

خاصيات

- ✓ **إذا كانت** f **و** g **قابلتين للاشتقاق على** I **و** $\alpha \in \mathbb{R}$ **فإن** $\alpha.f$ **و** $f+g$ **و** $f \times g$ **قابلة للاشتقاق على** I
- ✓ **بالإضافة إذا كانت** $g \neq 0$ **على** I **فإن** $\frac{1}{g}$ **و** $\frac{f}{g}$ **قابلة للاشتقاق على** I
- ✓ **إذاكانت** f **قابلة للاشتقاق على** I **و** g **قابلة للاشتقاق على** $f(I)$ **فإن** $g \circ f$ **قابلة للاشتقاق على** I
- ✓ **إذاكانت** f **قابلة للاشتقاق على** I **و** $f \geq 0$ **على** I **فإن** $\sqrt{f}$ **قابلة للاشتقاق على** I
- ✓ **إذاكانت** f **قابلة للاشتقاق على** I **فإن** f^n $(n \in \mathbb{N})$ **قابلة للاشتقاق على** I

الدالة	الدالة المشتقة
$\alpha.f$	$\alpha.f'$
$f+g$	$f'+g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$g \circ f$	$f' \times g' \circ f$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
f^n	$nf'f^{n-1}$
$\ln\|U\|$	$\frac{U'}{U}$
e^U	$U'e^U$

$\dfrac{U'}{1+U^2}$	$Arc\tan(U)$

❖ مشتقات الدوال الاعتيادية

المجال I	الدالة المشتقة f'	الدالة f
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$
$I =]-\infty,0[$ أو $I =]0,+\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0,+\infty[$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$I =]-\infty,0[$ أو $I =]0,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$
$I =]0,+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto Arc\tan(x)$

خاصية : مشتقة الدالة العكسية :

لتكن f دالة معرفة على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} و ليكن x_0 و y_0 عددان بحيث : $f^{-1}(x_0) = y_0$

إذا كانت $f'(y_0) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في x_0 و لدينا $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)}$

إذا كانت f' لا تنعدم على I فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ و لدينا :

$$(\forall x \in f(I)) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

رتابة دالة

- ✓ إذا كانت $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in I$ فإن f تزايدية على I
- ✓ إذا كانت $f'(x)\leq 0$ $\forall x\in I$ فإن f تناقصية على I
- ✓ إذا كانت $f'(x)> 0$ $\forall x\in I$ فإن f تزايدية قطعا على I
- ✓ إذا كانت $f'(x)< 0$ $\forall x\in I$ فإن f تناقصية قطعا على I

خاصية

- ✓ إذا كانت $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in I$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تزايدية قطعا على I
- ✓ إذا كانت $f'(x)\leq 0$ $\forall x\in I$ و كانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تناقصية قطعا على I

3) دالة الجذر من الرتبة n $(n\in\mathbb{N}^*)$

أ. تعريف :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$
الدالة العكسية للدالة $x\mapsto x^n$ على المجال $[0,+\infty[$ تسمى دالة الجدر من الرتبة n و نرمز لها ب : $x\mapsto\sqrt[n]{x}$
الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

ب. خصائص :

ليكن x و y عددان حقيقيان موجبان. لدينا :

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x \qquad \sqrt[n]{x^n}=x \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[nm]{x} \qquad \sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n]{x}^{\,m}$$

$$\sqrt[n]{x.y}=\sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\quad (y\neq 0)$$

ج. خاصية:

لتكن f دالة و $n\in\mathbb{N}^*$

- ➢ إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$
- ➢ إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و $l\geq 0$ فإن : $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$
- ➢ إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

د.القوى الجدرية لعدد حقيقي:

ليكن n و m من $\mathbb{N}^*$ و $x>0$ لدينا :
$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y و لكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$:

- $x^{r+r'}=x^r.x^{r'}$
- $x^r.y^r=(x.y)^r$
- $\left(x^r\right)^{r'}=x^{r.r'}$
- $\frac{1}{x^r}=x^{-r}$
- $\frac{x^r}{y^r}=\left(\frac{x}{y}\right)^r$
- $\frac{x^r}{x^{r'}}=x^{r-r'}$

خاصية

- **الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا :** $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$ $\left(\forall x\in\,]0,+\infty[\right)$
- **إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $f(x)>0$ $\left(\forall x\in I\right)$ فإن الدالة $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :** $\left(\sqrt[n]{f}\right)'=\frac{f'}{n\sqrt[n]{f}^{n-1}}$

4) دالة قوس الظل

تعريف

الدالة $f:\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\tan x$ **متصلة و تزايدية قطعا على** $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ **إذن** f **تقبل دالة عكسية** f^{-1}

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad x\mapsto \operatorname{Arc}\tan x$$

الدالة $\operatorname{Arc}\tan$ تسمى دالة قوس الظل

نتائج

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\forall y \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad y = Arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad Arc\tan x < Arc\tan y \Leftrightarrow x < y$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \tan(Arc\tan(x)) = x$$

$$\left(\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad Arc\tan(\tan(x)) = x$$

الدالة $Arc\tan$ دالة فردية

خاصية

- **الدالة $Arc\tan$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا** $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad Arcatn'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- **إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة** $Arc\tan(U)$ قابلة للاشتقاق على I **و لدينا :**

$$(Arc\tan(U))' = \frac{U'}{1+U^2}$$